مديرية التربية لولاية باتنة | ثانويـة: زانة البيضاء الجديدة

اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات | الموسم الدراسي: 2022/2021

الشعبة: الثالثة علوم تجريبية وتقني رياضي | المدة: 03 سا

التمرين الأول: (05 نقاط)

أجب بصح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1) الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{x\ln 2}-\ln\frac{3}{2}$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'=y\ln 2+\ln 3$.

2) عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد 3^{2022} هو: 964.

3) المعادلة: $e^{3x}+e^{2x}-6e^{x}=0$ تقبل حلين متمايزين في $\mathbb{R}$ هما $\ln 2$ و $-\ln 3$.

4) الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$

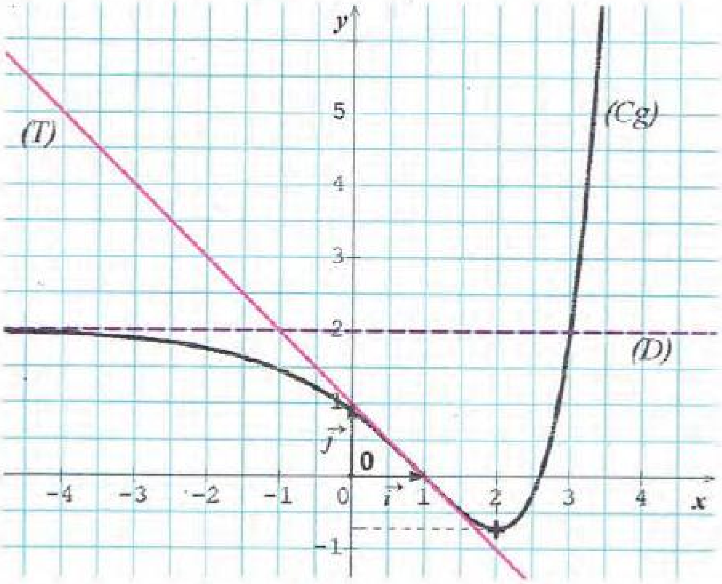
تمثيلها البياني (C) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس يقبل محور تناظر $x=2$ معادلة له.

5) الدالة العددية h المعرفة على $[-\pi;\pi]$ بـ: $h(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}; & x\neq 0\\ 2 \quad ; & x=0\end{cases}$ ، مستمرة في 0.

التمرين الثاني:(08 نقاط)

الجزء الأول:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. في الشكل المرفق، (C_g) هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x-3)e^{x-1}+2$ و (T) هو مماس (C_g) في النقطة ذات الفاصلة 1 و (D) هو المستقيم المقارب لـ (C_g) عند $-\infty$.



1) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2,5<\alpha<2,6$.

2) بقراءة بيانية أجب عن الأسئلة التالية:

أ. عين: $g(1)$ ، $g'(1)$، $g'(2)$ و $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g'(x)-g'(1)}{x-1}$.

ب. أكتب معادلة لـ (T).

ج. أنجز جدول تغيرات الدالة g.

د. استنتج تبعا لقيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

3) ليكن m وسيطا حقيقيا، ناقش بيانيا تبعا لقيم m عدد حلول المعادلة $g(x)=m(x-1)$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x-4)e^{x-1}+2x-1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ. أحسب نهايتي الدالة f عند كل من $+\infty$ و $-\infty$ ، ثم فسر بيانيا النتيجتين المحصل عليهما.

ب. بين أن المستقيم (Δ) حيث $y=2x-1$ معادلة له مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

ج. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

2) أ. بين أن: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$.

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f، ثم أنجز جدول تغيراتها.

3) أ. بين أن: $f(\alpha)=2\alpha-3+\dfrac{2}{\alpha-3}$، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

ب. بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $3{,}5\prec\beta\prec3{,}6$.

ج. أنشئ (Δ)، ثم مثل بيانيا (C_f).

التمرين الثالث: (07 نقاط)

I. في الشكل المرفق، (C) هو التمثيل البياني للدالة العددية $x\mapsto\ln x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. **(أنظر الصفحة 3 من 3)**

نعتبر الدالتين العدديتين k و g المعرفتين على كل من المجالين $]-1;+\infty[$ و $]-\infty;1[$ بـ: $k(x)=\ln(1+x)+1$ و $g(x)=\ln(1-x)+1$ على الترتيب. (C_k) و (C_g) تمثيليهما البيانيين في نفس المستوي السابق.

1) اشرح كيفية تمثيل بيانيا (C_k) انطلاقا من (C)، ثم مثله.

2) بين أن: (C_g) هو نظير (C_k) بالنسبة إلى حامل محور التراتيب، ثم مثله.

II. جدول التغيرات التالي هو للدالة العددية f المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;1[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{x+1}+\ln(1-x)$

حيث: (C_f) تمثيليهما البياني في نفس المستوي السابق.

x	$-\infty$		-3		-1		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{3}{4}+\ln4$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

1) أحسب: $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-g(x))$، ثم فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها.

2) أدرس الوضعية النسبية لكل من (C_f) و (C_g).

3) مثل بيانيا (C_f).

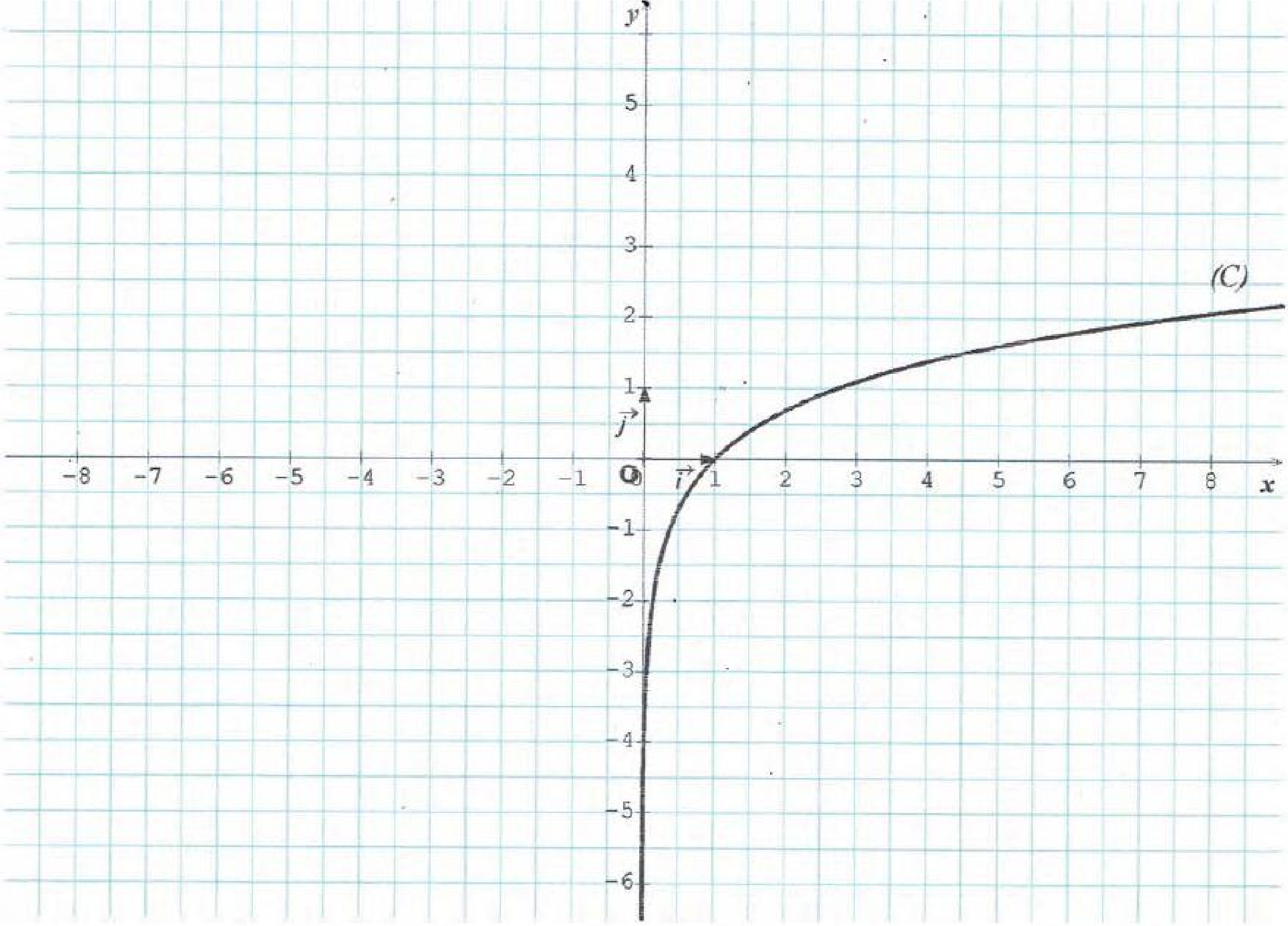
III. نعتبر الدالة العددية h المعرفة على D بـ: $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ حيث: $D=]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]1;+\infty[$.

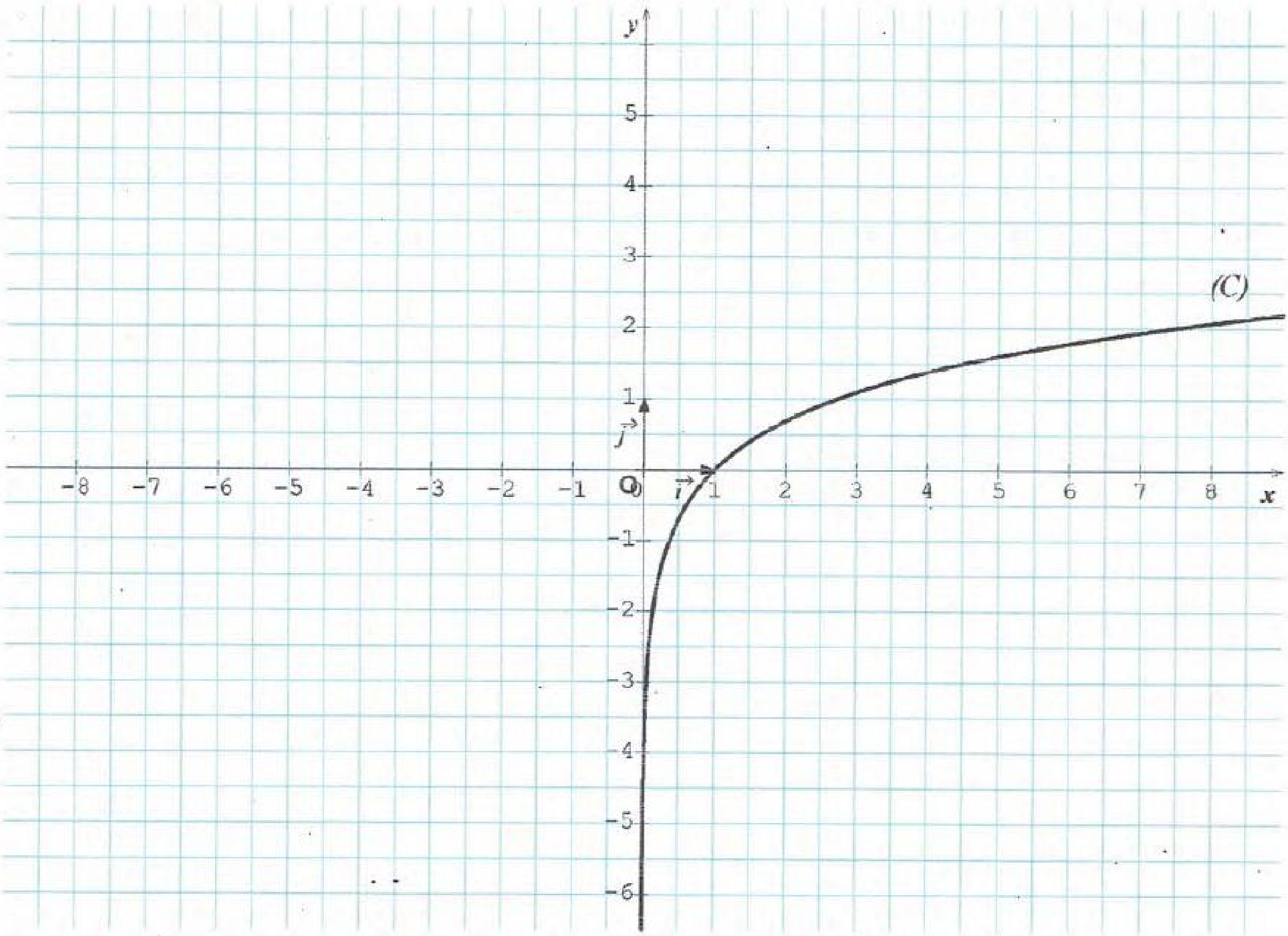
1) باستعمال مبرهنة نهاية مركب دالتين أحسب نهايات الدالة h عند الأطراف المفتوحة لمجالات مجموعة تعريفها.

2) أ. تحقق أن: من أجل كل $x\in D$: $h'(x)=-\dfrac{1}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

ب. عين إشارة $f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$ على D.

3) استنتج جدول تغيرات الدالة h.


(C)
x
y
O


(C)
x
y
O

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية باتنة — ثانوية: زانة البيضاء الجديدة

الشعبة: الثالثة علوم تجريبية، تقني رياضي — الموسم الدراسي: 2022/2021

إجابة مقترحة لاختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

حل التمرين الأول:

الإجابة بصح أو خطأ مع التبرير:

العبارة	الحكم	التبرير
01	خاطئة	• لدينا، من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f(x)=e^{x\ln 2}-\ln\frac{3}{2}$ ومنه، من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $e^{x\ln 2}=f(x)+\ln\frac{3}{2}$ • ولدينا من جهة أخرى: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x)=e^{x\ln 2}\cdot\ln 2$ $=\left(f(x)+\ln\frac{3}{2}\right)\ln 2$ $=f(x)\ln 2+\ln\left(\frac{3}{2}\right)\ln(2)$ إذن: $f'(x)\neq f(x)\ln 2+\ln 3$ وبالتالي f ليست حل للمعادلة التفاضلية $y'=y\ln 2+\ln 3$
02	خاطئة	لدينا: $[\log 3^{2022}]=964$ نعلم أن: $[\log 3^{2022}]\leq\log 3^{2022}<[\log 3^{2022}]+1$ أي: $964\leq\log 3^{2022}<965$ $\log 10^{964}\leq\log 3^{2022}<10^{965}$ $10^{964}\leq 3^{2022}<10^{965}$ ومنه عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد 3^{2022} هو 965
03	خاطئة	تكافئ: $e^{3x}+e^{2x}-6e^{x}=0$ ، $e^{x}(e^{2x}+e^{x}-6)=0$ $e^{2x}+e^{x}-6=0$ ...(*) نضع، من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $t=e^{x}$ (أي، من أجل كل $t\in]0;+\infty[$ ، $x=\ln t$)

(*) تكافئ:

$$\begin{cases} t = e^{x} \\ t^2 + t - 6 = 0 \quad ...(**) \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$ | $a = 1;\ b = 1;\ c = -6$

$\Delta = 25$

بما أن: $\Delta > 0$ فإن (**) تقبل حلين متمايزين:

$$\begin{cases} t = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-5}{2} = -3 \\ \text{أو} \\ t = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+5}{2} = 2 \end{cases}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (*) هي S حيث:

$$S = \{ \ln 2 \}$$

---

04 صحيحة. لدينا: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$$
$$= \sqrt{(x-2)^2 - 4 + 5}$$
$$g(x) = \sqrt{(x-2)^2 + 1}$$

إذا كان: $x \in \mathbb{R}$ فإن: $4 - x \in \mathbb{R}$

ولدينا:

$$g(4-x) = \sqrt{(4-x-2)^2 + 1}$$
$$= \sqrt{(2-x)^2 + 1}$$
$$= \sqrt{(x-2)^2 + 1}$$
$$= g(x)$$

وبالتالي (C) يقبل المستقيم حيث: $x = 2$ معادلة له، محور تناظر له.

---

05 صحيحة

لدينا $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين من الشكل

لإزالتها:

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 = h(0)$$

وبالتالي h مستمرة في "0"

حل التمرين الثاني:

الجزء الأول:

1) إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$2,5 < \alpha < 2,6$

الدالة g معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وخصوصا على المجال $[2,5;2,6]$

وبما أن: $g(2,5)\times g(2,6) < 0$

لأن: $g(2,5) \simeq -0,24$ و $g(2,6) \simeq 0,02$

فإن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]2,5;2,6[$

وبما أن الدالة g متزايدة تماما على $[2,5;2,6]$

فإن هذا الحل وحيد نرمز إليه بالرمز α

$(g(\alpha)=0)$

تبرير كون الدالة g متزايدة تماما على المجال $[2,5;2,6]$:

لدينا: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $g'(x) = e^{x-1} + (x-3)e^{x-1}$

$= (x-2)e^{x-1}$

وعليه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-2$

وبالتالي: من أجل كل $x\in[2,5;2,6]$: $g'(x)>0$

أي أن الدالة g متزايدة تماما على $[2,5;2,6]$.

2) تعيين: $g(1)$ ، $g'(1)$ ، $g'(2)$ و $\lim\limits_{x\to 1}\frac{g'(x)-g'(1)}{x-1}$

• $g(1)=0$

• $g'(1)$ بيانيا هو معامل توجيه المماس (T)

بما أن: $\begin{cases} A(1;0)\in(T) \\ B(-1;2)\in(T)\end{cases}$ فإن: $g'(1) = \frac{2-0}{-1-1} = -1$

• $g'(2)=0$ لأن: $(\mathcal{C}_g)$ يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 2

• بما أن الدالة g' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وخصوصا في 1 فإن: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{g'(x)-g'(1)}{x-1} = g''(1)$

وبما أن: (T) يخترق $(\mathcal{C}_g)$ في النقطة ذات الفاصلة 1 فإن هذه النقطة نقطة انعطاف لـ $(\mathcal{C}_g)$ ينتج عن ذلك أن: $g''(1)=0$

وبالتالي:

$$\lim_{x\to 1}\frac{g'(x)-g'(1)}{x-1} = 0$$

ب) كتابة معادلة لـ (T)

لدينا: $(T): y = g'(1)(x-1)+g(1)$

ومنه: $(T): y = -x+1$

جـ) انجاز جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$		1		2		α		$+\infty$
$g'(x)$					0				
$g(x)$	2	↘	0	↘	$2-e$	↗	0	↗	$+\infty$

د) استنتاج إشارة $g(x)$ تبعا لقيم x:

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3) المناقشة البيانية تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $g(x) = m(x-1)$ ....(*)

عدد حلول المعادلة (*) بيانيا يمثل عدد نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم (Δ_m) الذي معادلته: $y = m(x-1)$
هذا المستقيم معامل توجيهه m.

ولدينا: من أجل $m \in \mathbb{R}$: $m(x-1) - y = 0$

يكافئ: $x-1=0$ و $y=0$

وبالتالي هذا المستقيم يشمل نقطة ثابتة إحداثيتيها $(1;0)$ مهما تغير m.

مما سبق نستنتج أن نوع هذه المناقشة البيانية: دورانية.

قيم m	عدد حلول المعادلة (*)
$m \in]-\infty;-1[$	المعادلة (*) تقبل حلا وحيدا
$m = -1$	المعادلة (*) تقبل ثلاثة حلول متساوية
$m \in]-1;0[$	المعادلة (*) تقبل ثلاثة حلول متمايزة م م م
$m \in [0;+\infty[$	المعادلة (*) تقبل حلين متمايزين

الجزء الثاني:

1) أ) حساب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ ثم تفسير النتيجتين بيانيا:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[(x-4)e^{x-1} + 2x - 1\right]$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

التبرير:

$$\lim_{x \to +\infty} (x-4)e^{x-1} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} (2x-1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{x-4}{x-1}(x-1)e^{x-1} + 2x - 1\right]$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$$

التبرير:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-4}{x-1} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -\infty} (x-1)e^{x-1} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -\infty} (2x-1) = -\infty$$

التفسير البياني للنتيجتين:

بما أن: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ فإن (C_f) لا يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور الفواصل عند كل من $+\infty$ و $-\infty$.

1) ب) إثبات أن (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (2x-1)] = \lim_{x \to -\infty} (x-4)e^{x-1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x-4}{x-1}(x-1)e^{x-1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (2x-1)] = 0$$

التبرير:

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{x-4}{x-1} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -\infty} (x-1)e^{x-1} = 0}$$

وبالتالي (Δ) م م مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

1) جـ) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ):

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - (2x-1)$

لدينا: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$، $f(x) - (2x-1) = (x-4)e^{x-1}$

وبالتالي إشارة الفرق هي إشارة $x - 4$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x)-(2x-1)$	$-$	0	$+$
وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)	(C_f) أسفل من (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي احداثيتيها $(4;7)$	(C_f) أعلى من (Δ)

2) أ. إثبات أنه: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$

لدينا: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{x-1}+(x-4)e^{x-1}+2$

ومنه: $= (x-4+1)e^{x-1}+2$

$=(x-3)e^{x-1}+2$

إذن: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$

2) ب. استنتاج اتجاه تغير الدالة f ، ثم انجاز جدول تغيراتها.

بما أن: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$

فإن اشارة $f'(x)$ هي اشارة $g(x)$

x	$-\infty$	1		α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty\nearrow$	-2	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow+\infty$

3) أ. إثبات أن: $f(\alpha)=2\alpha-3+\dfrac{2}{\alpha-3}$

لدينا: $g(\alpha)=0$

ومنه: $(\alpha-3)e^{\alpha-1}+2=0$

$(\alpha\neq3$ لأن$)$; $e^{\alpha-1}=\dfrac{-2}{\alpha-3}$

ولدينا: $f(\alpha)=(\alpha-4)e^{\alpha-1}+2\alpha-1$

$=(\alpha-4)\left(\dfrac{-2}{\alpha-3}\right)+2\alpha-1$

$=-2\left(\dfrac{\alpha-3-1}{\alpha-3}\right)+2\alpha-1$

$=-2\left(1-\dfrac{1}{\alpha-3}\right)+2\alpha-1$

ومنه: $f(\alpha) = 2\alpha - 3 + \dfrac{2}{\alpha - 3}$

استنتاج حصر لـ $f(\alpha)$:

نضع: من أجل $\alpha \in]2,5 ; 2,6[$: $\varphi(\alpha) = f(\alpha)$

ومنه: $\varphi'(\alpha) = 2 - \dfrac{2}{(\alpha-3)^2}$

$= 2\left[\dfrac{(\alpha-3)^2 - 1}{(\alpha-3)^2}\right]$

$= \dfrac{2(\alpha-4)(\alpha-2)}{(\alpha-3)^2}$

بما أن: من أجل كل $\alpha \in]2,5 ; 2,6[$ ، $\varphi'(\alpha) < 0$

فإن الدالة φ متناقصة تماما على $]2,5 ; 2,6[$

وبالتالي:

$\alpha \in]2,5 ; 2,6[$ يستلزم $\varphi(\alpha) \in]\varphi(2,6) ; \varphi(2,5)[$

أي أن:

$f(\alpha) \in]-2,8 ; -2[$

3) ب. إثبات أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $3,5 < \beta < 3,6$

الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على المجال $[3,5 ; 3,6]$

ولدينا: $f(3,5) \times f(3,6) < 0$

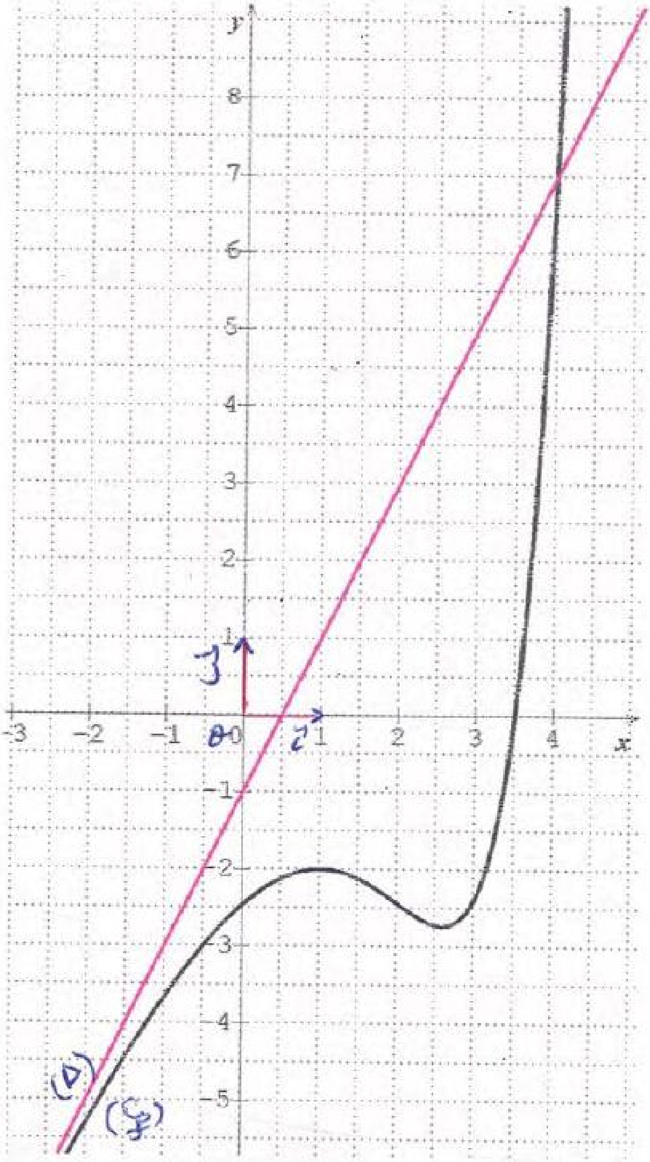
لأن: $f(3,5) \simeq -0,09$ و $f(3,6) \simeq 0,81$

فإن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]3,5 ; 3,6[$

وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $]3,5 ; 3,6[$

فإن هذا الحل وحيد نرمز له بـ β

وبالتالي (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $3,5 < \beta < 3,6$.



التمثيل البياني لـ (ج) وإنشاء المستقيم (Δ)

حل التمرين الثالث:

I) 1) شرح كيفية تمثيل (C_k) انطلاقا من (C):

لدينا: من أجل كل $x \in]-1;+\infty[$: $k(x) = \ln(x+1) + 1$

وبالتالي (C_k) هو صورة (C) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ الذي مركبتيه $(-1;1)$.

2) إثبات أن: (C_g) هو نظير (C_k) بالنسبة إلى حامل محور التراتيب:

لدينا: إذا كان: $x \in]-1;+\infty[$ فإن: $-x \in]-\infty;1[$

و
$$k(-x) = \ln(1-x) + 1$$
$$= g(x)$$

وبالتالي (C_g) و (C_k) متناظران بالنسبة إلى حامل محور التراتيب.

II) 1) حساب: $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - g(x))$

لدينا:
$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x+1} - 1\right)$$

ومنه:
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x - x - 1}{x+1}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x+1}$$

ومنه:
$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} (f(x) - g(x)) = 0}$$

التفسير البياني للنتيجة المحصل عليها:

المنحنيان (C_f) و (C_g) متقاربان عند $-\infty$.

2) دراسة الوضعية النسبية لكل من (C_f) و (C_g):

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - g(x)$

لدينا: من أجل كل $x \in]-\infty;-1[\cup]-1;1[$:

$$f(x) - g(x) = \frac{-1}{x+1}$$

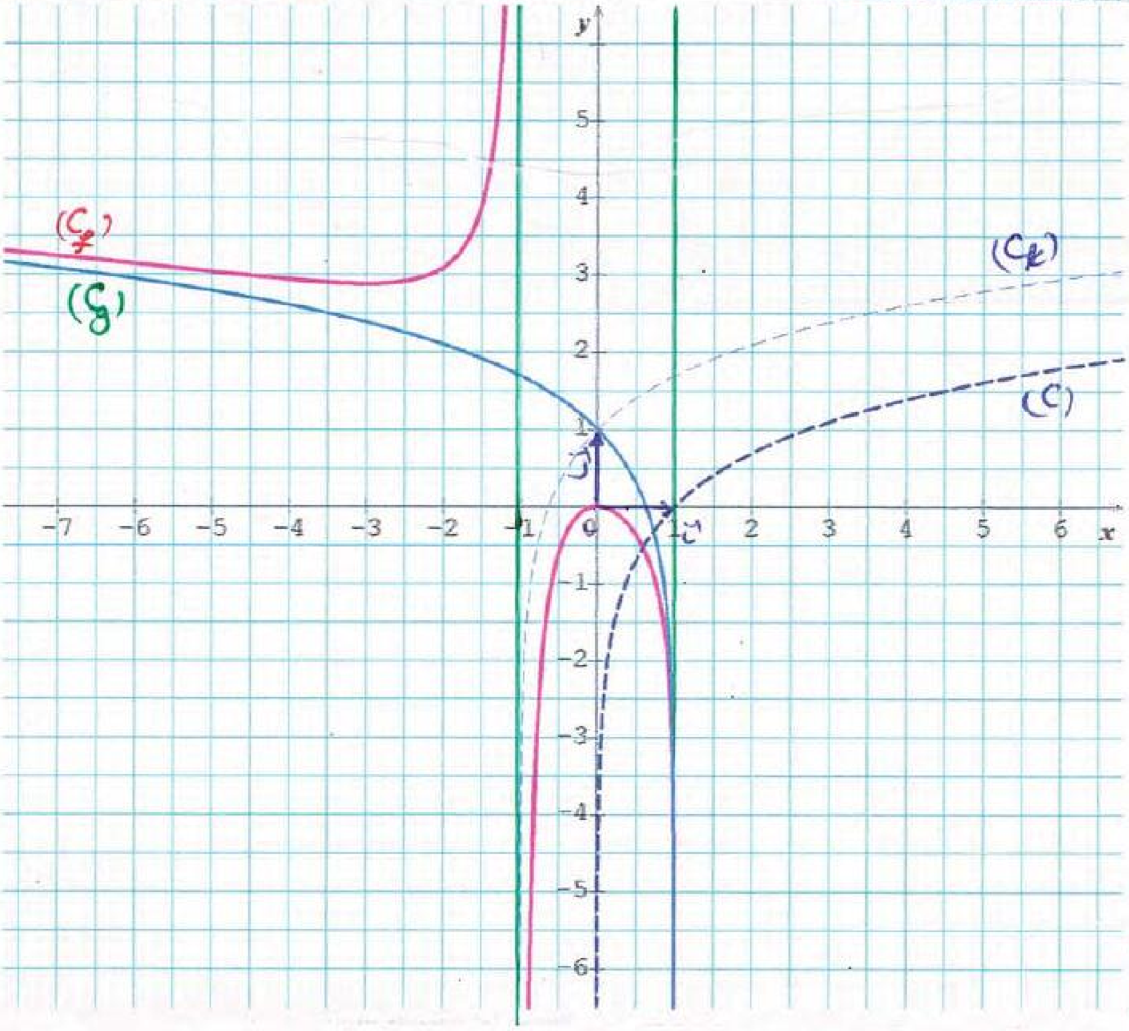
وبالتالي إشارة الفرق $f(x) - g(x)$ هي عكس إشارة "$x+1$" على كل من المجالين $]-\infty;-1[$ و $]-1;1[$

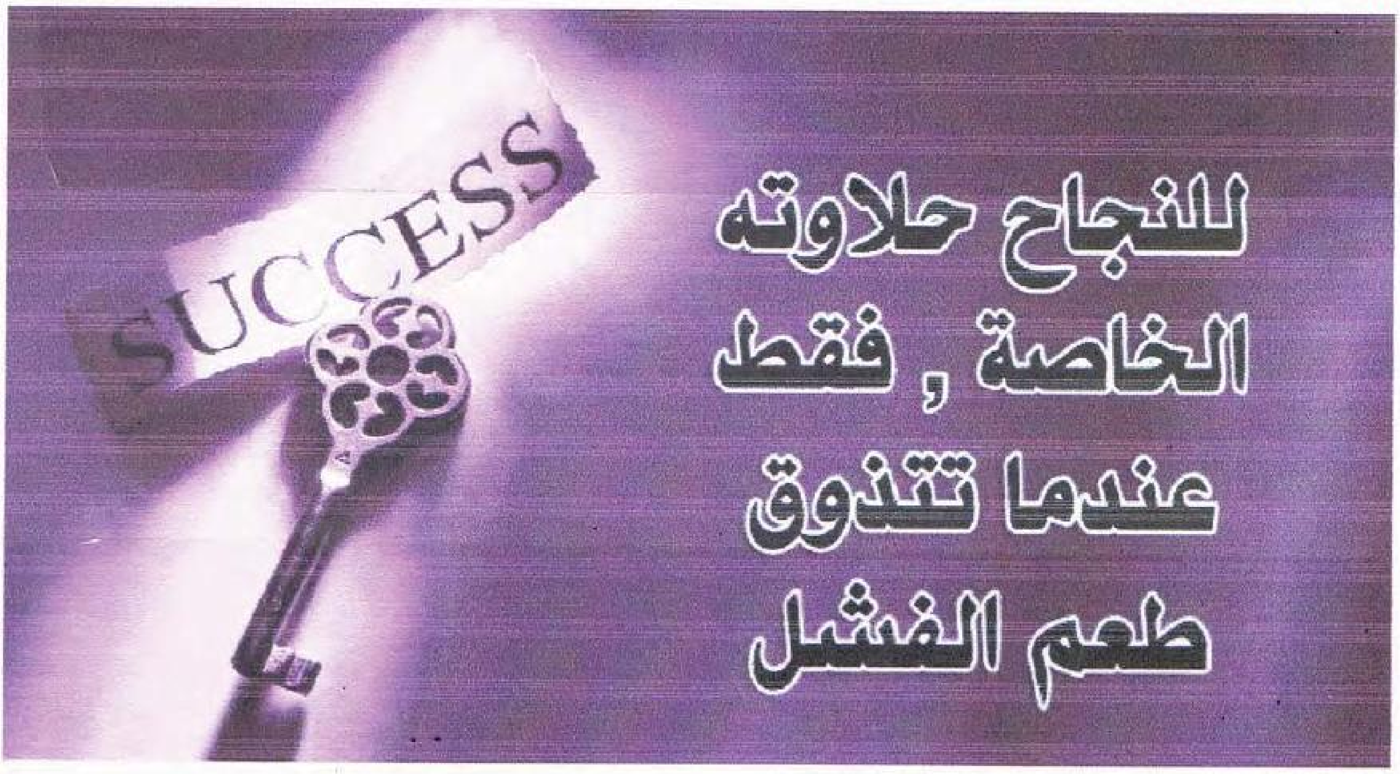
x	$-\infty$ ... -1	-1 ... 1
$f(x)-g(x)$	+	−
الوضع النسبي لكل من (C_f) و (C_g)	(C_f) أعلى من (C_g)	(C_f) أسفل من (C_g)

إشارة "$x+1$" على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ ... -1	-1 ... $+\infty$
$x+1$	−	+

3) التمثيل البياني لـ (C_g):





III)

1) حساب نهايات الدالة h عند الأطراف المفتوحة لمجالات مجموعة تعريفها:

• لما:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0 \end{cases}$$

فإن حسب مبرهنة نهاية مركب دالتين

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0}$$

• لما:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \end{cases}$$

فإن ح مبرهنة نهاية مركب دالتين

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0}$$

• لما:

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{1}{x} = -1$$

وإذا كان: $x < -1$ فإن: $\frac{1}{x} > -1$

ولدينا: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$

فإن: حسب مبرهنة نهاية مركب دالتين:

$$\boxed{\lim_{x \overset{<}{\to} -1} h(x) = -\infty}$$

• لما:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{1}{x} = -1$$

وإذا كان: $x > -1$ فإن: $\frac{1}{x} < -1$

ولدينا: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = +\infty$

فإن: حسب مبرهنة نهاية مركب دالتين

$$\boxed{\lim_{x \overset{>}{\to} -1} h(x) = +\infty}$$

• لما:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

فإن حسب مبرهنة نهاية مركب دالتين

$$\boxed{\lim_{x \overset{<}{\to} 0} h(x) = +\infty}$$

• لما:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1}{x} = 1$$

وإذا كان: $x > 1$ فإن: $\frac{1}{x} < 1$

ولدينا: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$

فإن: حسب مبرهنة نهاية مركب دالتين:

$$\boxed{\lim_{x \overset{>}{\to} 1} h(x) = -\infty}$$

ج) 2) التحقق أن: من أجل كل $x \in D$: $h'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$

لدينا: من أجل كل $x \in D$: $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

ومنه: من أجل كل $x \in D$:

$$h'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

وبالتالي: من أجل كل $x \in D$: $h'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$

ب) تعيين إشارة $f'\left(\frac{1}{x}\right)$ على D :

لدينا:

x	$-\infty$		-3		-1		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$

ولدينا: جدول تغيرات الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على D :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		0		1		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$		1	$\searrow$	0

ومنه:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		0		1		$+\infty$
$f'\left(\frac{1}{x}\right)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$			$\Vert$	$-$	

3) استنتاج جدول تغيرات الدالة h :

بما أن: من أجل كل $x \in D$: $h'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$

وبالتالي إشارة $h'(x)$ هي عكس إشارة $f'\left(\frac{1}{x}\right)$ على D

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$			$\Vert$	$+$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}+\ln 4$	$\nearrow$	$+\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	0

اللهم وفقنا لما تحبه وترضاه.